

Tabella delle equazioni da memorizzare

1

Generale

Prodotto scalare

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \hat{a}\hat{b}$$

Prodotto vettoriale (modulo)

$$|\vec{a} \wedge \vec{b}| = a \cdot b \cdot \sin \hat{a}\hat{b}$$

Mecchanica - cinematica

F
O
T
O
C
O
N
A
C
C
E
L
E
R
A
Z
I
O
N
E
C
O
S
T
A
N
T
E
E
D
E
Q
U
A
Z
I
O
N
I

Velocità media

$$\bar{v}_m = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad [L] \cdot [T]^{-1}$$

velocità istantanea

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

accelerazione media

$$\bar{a}_m = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad [L] \cdot [T]^{-2}$$

accelerazione istantanea

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

accelerazione per $b_i = 0$
($a = \text{costante}$)

$$a = \frac{v - v_0}{t} \Rightarrow v = v_0 + a \cdot t$$

$\bar{v}_m$ con $a = \text{costante}$

$$\bar{v}_m = \frac{v_0 + v}{2}$$

Δx con $a = \text{costante}$

$$\Delta x = \bar{v} \cdot \Delta t = \frac{v_0 + v}{2} \cdot \Delta t = \left(\frac{v_0 + v_0 + at}{2} \right) \cdot at = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

v in funz. di x con $a = \text{cost.}$

$$\Delta x = \frac{1}{2} (v_0 + v) t = \frac{1}{2} (v_0 + v) \frac{(v - v_0)}{a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2a \Delta x$$

$$\begin{cases} v \text{ con } a = g \\ x \text{ con } a = g \end{cases}$$

$$v = v_0 - gt$$

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Spostamenti generici

$$\Delta x = \int_{t_i}^{t_f} v(t) \cdot dt$$

vettore posizione nello spazio

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j} + z(t) \hat{k}$$

$\vec{r}$ nel moto un. acc. nello spazio

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v} t$$

$\vec{r}$ posizione nel H.V.A. nello spazio

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

velocità tang. nel moto arc. unif.

$$v_t = \frac{2\pi r}{T}$$

accelerazione centr. nel moto arc. unif.

$$a_c = \frac{v_t^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

velocità angolare nel moto arc. unif.

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \quad [\text{rad}] \cdot [T]^{-1}$$

velocità tang. in funz. di quella ang.
nel moto arc. unif.

$$v_t = \omega \cdot r$$

F
O
T
O
C
I
R
C
O
L
A
N
S

RE UNIFORME E D

accel. tang. nel moto circ. unif. acc.
 accel. ang nel moto circ unif. acc.
 velocità ang nel moto circ unif. acc.
 angoli percorsi nel moto circ unif. acc.
 accelerazione complessiva nel moto circ unif. acc.

$$a_T = \frac{d|a|}{dt} \text{ in cui } a(t) = \frac{dS}{dt}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \text{ in cui } \omega(t) = \frac{d\theta}{dt} [\text{rad}][T]^{-1}$$

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = \sqrt{R\omega^4 + R\alpha^2}$$

LEGGI DELLA DINAMICA E APPLICAZIONI

Meccanica - dinamica

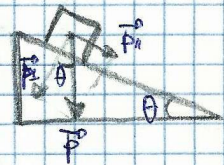
Seconda legge di Newton
 forze peso
 terza legge di Newton
 descrizione dinamica del moto di un blocco su un piano inclinato

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad [F] = [M] \cdot [L \cdot T^{-2}] \text{ in cui } N$$

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}$$

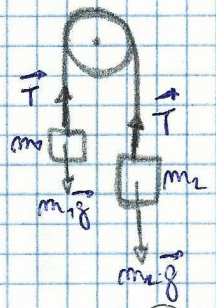
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\vec{F} = \begin{cases} F_x = m \cdot g \cdot \sin \theta = m \cdot a_x \\ F_y = m - m \cdot g \cdot \cos \theta = 0 \end{cases}$$



accelerazione e tensione nelle macchine di Atwood

$$\begin{cases} a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \\ T = \frac{2 \cdot m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot g \end{cases}$$



caratteristiche dell'attrito statico
 attrito dinamico

$$f_s \leq \mu_s \cdot N$$

$$f_d = \mu_d \cdot N$$

attrito statico e dinamico a confronto (in generale)

$$\mu_d < \mu_s, |f_d| < |f_{s \max}|$$

forza resistente proporzionale alla velocità (es. pannello nell'aria)

$$\vec{R} = -b \vec{v}$$

forza res. prop al quadrato della velocità (es. aerei, treni, ecc.)

$$R = \frac{1}{2} C \cdot A \cdot \rho \cdot v^2$$

ρ densità aria
 A sezione oggetto in movimento
 C coefficiente empirico di resistenza
 (per forme sferiche $C \approx 1$ oggetti irregolari)

forza centripeta nel moto circ. unif.

$$F_c = m \cdot a_c = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

descrizione dinamica del pendolo conico

$$\vec{F} = \begin{cases} T_y = T \cos \theta = mg \\ T_x = T \sin \theta = F_c = m \cdot \frac{v^2}{r} \end{cases}$$

velocità e periodo del pendolo conico

$$v = \sqrt{L \cdot g \cdot \sin \theta \cdot \theta} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}$$

DINAMICA

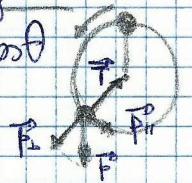
Spia elevazione in curva
(caricab)

$$\tan \theta = \frac{v^2}{rg}$$



ensione di un filo cui e' legata una pallina rotante in modo non unif. lungo una circ. verb.

$$T = F_c + P_L = \frac{mv^2}{r} + mg \cos \theta$$

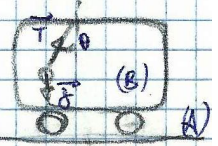


Accelerometro lineare

- per l'osservatore inerziale (A)
- per l'osservatore non inerziale (B)

$$\begin{cases} F_x = T \sin \theta = m \cdot a \\ F_y = T \cos \theta - mg = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_x = T \sin \theta - m \cdot a = 0 \\ F_y = T \cos \theta - mg = 0 \end{cases}$$

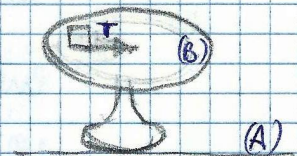


Blocc in moto circolare su una piattaforma

- per l'osservatore inerziale (A)
- per l'osservatore non inerziale (B)

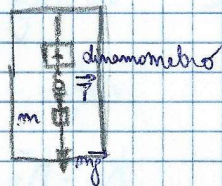
$$T = \frac{mv^2}{r}$$

$$T - \frac{mv^2}{r} = 0$$



Peso di un corpo in ascensore al momento della partenza o dell'arrivo, cioè con acc. $\vec{a}$

$$F_g = T - mg = m \cdot a_y \Rightarrow T = m a_y + mg = mg \left(\frac{a_y}{g} + 1 \right) = P \left(\frac{a_y}{g} + 1 \right)$$



Meccanica dinamica - Lavoro ed Energia

Lavoro di una forza costante

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \theta \quad [M \cdot L^2 \cdot T^{-2}]$$

ud.m.: J

Lavoro di una forza variabile

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \vec{F}_x \cdot d\vec{x} = \int_{x_i}^{x_f} F \cdot \cos \theta \cdot dx$$

Forza elastica

$$F_m = -k \cdot x$$

Lavoro eseguito da una molla

$$W_m = \int_{x_i}^{x_f} F_m \cdot dx = \int_{x_{max}}^0 (-k \cdot x) \cdot dx = \frac{1}{2} k x_{max}^2$$

$$W_m = \int_{x_i}^{x_f} F_m \cdot dx = \int_0^{x_{max}} (-kx) \cdot dx = -\frac{1}{2} k x_{max}^2$$

Lavoro eseguito su una molla da una forza esterna

$$W_m = \int_{x_{max}}^0 (-kx) \cdot dx = \frac{1}{2} k x_{max}^2$$

$$W_m = \int_0^{x_{max}} (-kx) \cdot dx = \frac{1}{2} k x_{max}^2$$

Potenza media

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad [M \cdot L^2 \cdot T^{-3}] \quad \text{ud.m.: W}$$

Potenza istantanea

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

teorema delle forze vive

$$\Delta K_F = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \Delta K$$

lavoro di una forza conservativa da un punto P a un punto Q

$$W_{PQ} = \int_{\text{cammino 1}}^Q \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_Q^P \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \int_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_Q^P \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_P^Q \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

lavoro di una molla in un campo conservativo

$$W_m = \int_{x_i}^{x_f} -(kx) \cdot dx = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$$

lavoro di forze non conservative

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} \neq 0$$

energia potenziale

$$U(P) = - \int_{P_0}^P \vec{F} \cdot d\vec{s} + U(P_0)$$

differenza di energia potenziale tra P_1 e P_2

$$\begin{aligned} U(P_2) - U(P_1) &= - \int_{P_0}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} + U(P_0) + \int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} - U(P_0) \\ &= - \left(\int_{P_0}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{P_0}^{P_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} \right) = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\Delta W_F \end{aligned}$$

energia potenziale gravitazionale

$$U_g = m g \cdot h$$

lavoro delle forze di gravità

$$\Delta W_g = - m g (h_f - h_i)$$

conservazione dell'energia meccanica

$$K_2 - K_1 = W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \text{ se } \vec{F} \text{ è conservativa}$$

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = U(P_1) - U(P_2) = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow K_1 + U(P_1) = K_2 + U(P_2) \text{ [costante]}$$

$$\Rightarrow E = K + U \text{ [costante]}$$

teorema dell'energia cinetica con forze non conservative

$$W_{mc} + W_c = \Delta K, \text{ in cui } W_c = \Delta U$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W_{mc} &= \Delta K + \Delta U = (K_f - K_i) + (U_f - U_i) = \\ &= (K_f + U_f) - (K_i + U_i) = E_f - E_i \end{aligned}$$

Meccanica - quantità di moto

Q
U
A
N
T
I
T
À

D
I

S
I
S
T
E
M
A

R
O
T
O
V
A
R
I
A
B
I
L
E

Quantità di moto $\vec{p}$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} \text{ in cui } m \vec{v} = \vec{p}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Teorema dell'impulso

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{F} \cdot dt = d\vec{p} \Rightarrow \Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot dt$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \Delta \vec{p} = \vec{p}_{medio} \cdot \Delta t$$

Conservazione della quantità di moto in campi conservativi

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{costante} = \vec{P} \quad [M \cdot L \cdot T^{-1}]$$

Velocità dopo un urto perfettamente elastico tra due particelle (unidimensionale)

$$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Velocità di due particelle dopo un urto perfettamente elastico (unidimensionale)

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2i}$$

Velocità iniziale di una pallottola nel pendolo balistico

$$v_{1p} = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}$$

Spinta di un sistema a massa variabile

$$S = M \frac{dv}{dt} = v_s \frac{dM}{dt}$$

Variazione di velocità di un sistema a massa variabile

$$\Delta V = -v_s \ln \left(\frac{M_f}{M_i} \right) = v_s \ln \left(\frac{M_i}{M_f} \right)$$

Meccanica - Sistemi di punti materiali

C
E
N
T
R
O

D
I

R
A
S
S
A
L
I

I
N
S
I
S
T
E
M
A

D

Centro di massa di un sistema di due punti (unidimensionale)

$$x_{cm} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} x_2$$

Relazione della posizione del cm rispetto alle masse

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

Centro di massa di una distribuzione continua di massa

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \, dm = \begin{cases} x_{cm} = \frac{1}{M} \int x \, dm \\ y_{cm} = \frac{1}{M} \int y \, dm \end{cases}$$

Centro di massa di una distribuzione continua di massa con densità costante

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} \, dV$$

Quantità di moto di un sistema con centro di massa

$$\vec{P} = M \cdot \vec{v}_{cm}$$

Forza esterna su un sistema con centro di massa

$$\vec{F}_{est} = M \cdot \vec{a}_{cm}$$

Forza esterna su due blocchi in contatto con fune inestensibile

$$\vec{F}_{est} = (m_1 + m_2) \cdot \vec{a}_{cm}$$

PUNTI
R
A
T
E

Forza esterna su due blocchi
legati da una molla

Forza esterna su due blocchi
indipendenti

Energia cinetica totale di un
sistema (teorema di König)

$$\vec{F}_{\text{tot}} = (m_1 + m_2) \vec{a}_{\text{cm}}$$

$$\vec{F}_{\text{ext}} = m_2 \vec{a}_{\text{cm}}$$

$$K = K' + \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2$$

Mecchanica - Dinamica rotazionale

M
O
M
E
N
T
O

D
I
N
E
R
Z
I
A

P
O
R
T
O

A
N
G
O

Definizione di corpo rigido

Momento d'inerzia di un
punto del corpo rigido (P_i)

Energia cinetica per P_i

Momento d'inerzia totale

Energia cinetica rotazionale tot.
basi

Momento di una forza

Modulo del momento di una
forza (con $\vec{r} \perp \vec{F}$)

Momento angolare di una
forza

Altra espressione del momento
di una forza

$$d_{ij} = \text{cost} \quad \forall i, j$$

$$I_i = m_i \cdot R_i^2$$

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i R_i^2 \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} I_i \cdot \omega^2$$

$$I = \sum m_i \cdot R_i^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = r \cdot F = r \cdot m \cdot a_t = r \cdot m \cdot \alpha \cdot r = m \cdot r^2 \cdot \alpha = I \cdot \alpha$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

E
S
P
R
E
S
S
I
O
N
I

D
E
L

M
O
M
E
N
T
O

D
I

Espressioni del momento d'inerzia
rispetto per:

- stanghetta di lunghezza l (omogenea)
- rispetto al CM:
- rispetto ad un estremo
- cilindro o disco rispetto
al CM:
- una sfera piena:
- una sfera cava:
- un anello:
- rispetto al CM:
- rispetto ad una retta parallela
per un diametro:

$$I_{\text{cm}} = \frac{M l^2}{12}$$

$$I = \frac{M l^2}{3}$$

$$I = \frac{M R^2}{2}$$

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

$$I = \frac{2}{3} M R^2$$

$$I_{\text{cm}} = R^2 M$$

$$I = \frac{M R^2}{2}$$

Teorema degli assi paralleli

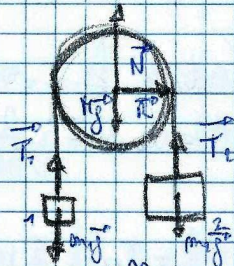
$$I = I_{cm} + M \cdot d^2$$

Descrizione di una puleggia con fune cui è applicata una forza F parallela alla fune

$$\alpha = \frac{\gamma_2}{I} = \frac{R \cdot F}{I}$$

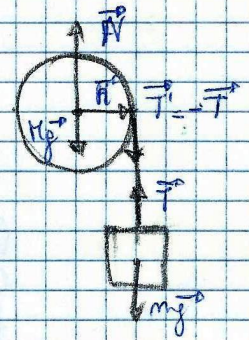
$$a = \alpha \cdot R = \frac{R \cdot F}{I} \cdot R = \frac{FR^2}{I} = \frac{2F}{M}$$

Descrizione di una puleggia di massa M con attaccato un blocco di massa m



Descrizione della macchina di Atwood

$$\begin{cases} a = \frac{2m}{m+M} g \\ T = \frac{M \cdot mg}{2m+M} \\ F_{ext} = \frac{2m^2 g}{M+2m} \end{cases}$$



$$\begin{cases} a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} g \\ T_1 = \frac{4 m_1 m_2 + m_2 M}{2(m_1 + m_2) + M} g \\ T_2 = \frac{4 m_1 m_2 + m_1 M}{2(m_1 + m_2) + M} g \end{cases} \quad \alpha = \frac{R(T_2 - T_1)}{I}$$

Teorema delle forze vive nel moto rotatorio

$$W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I \cdot \omega \cdot d\omega = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2$$

Descrizione del moto di una sbarra omogenea di lunghezza L vincolata ad un estremo e lasciata libera di ruotare nel piano perpendicolare al simbolo



$$\frac{1}{2} I \omega_f^2 = Mg \frac{L}{2} \Rightarrow \omega_f = \sqrt{\frac{MgL}{I}} = \sqrt{\frac{Mg \cdot \frac{L}{2}}{\frac{ML^2}{3}}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

$$\vec{R} + Mg = M \cdot \vec{a}_c \Rightarrow R - Mg = M \cdot a_c = M \cdot \omega^2 \cdot R = M \cdot \frac{3g}{L} \cdot \frac{L}{2} = \frac{3}{2} Mg \Rightarrow R - Mg = \frac{3}{2} Mg \Rightarrow R = \frac{5}{2} Mg$$

$$\Delta K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} Mg \frac{L}{2} \cos \theta d\theta = Mg \frac{L}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = Mg \frac{L}{2}$$

Moto di rotolamento

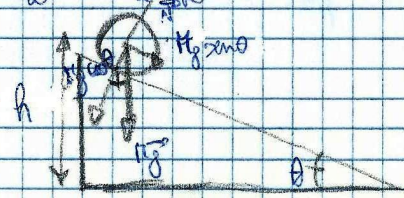
$$\begin{cases} F_f = M \cdot a_{cm} \\ f_s = I_{cm} \frac{a_{cm}}{R^2} \end{cases} \Rightarrow a_{cm} = \frac{2}{3} \frac{F}{M} \left(\mu_s \geq \frac{F}{3mg} \right)$$

$$K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{3}{4} M v_{cm}^2$$

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dK}{dt} = \frac{3}{2} M v_{cm} \cdot a_{cm}$$

Velocità finale di un corpo che rotola lungo un piano inclinato partendo da fermo ad altezza h . Il raggio è diverso e dipende dalla forma del corpo, rappresentata da I_{cm} (e della massa).

$$Mgh = \frac{1}{2} M v_f^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega_f^2 \Rightarrow v_f^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{I_{cm}}{R^2 M}}$$



T
A
L
I
O
N
A
L
E

Rotolamento di un corpo lungo un piano inclinato dal punto di vista dinamico (negli esercizi considerazioni fatte per la velocità).

$$\begin{cases} Mg \sin \theta - f_s = M a_{cm} \\ -Mg \cos \theta + N = 0 \\ r a = f_s R = I \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_s = I \alpha \cdot \frac{R}{R^2} \\ a_{cm} = \frac{g \sin \theta}{1 + \frac{I \alpha}{M R}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F_p = M a_{cm} \\ r a = R \cdot f_k = I \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{cm} = -\frac{f_k}{M} \\ \alpha = \frac{R \cdot f_k}{I} = \frac{5 f_k}{2 M R} \end{cases}$$

Descrizione cinematica e dinamica del moto rototranslatorio di una palla da biliardo cui è impresso centralmente una forza F .

$$\Rightarrow \begin{cases} v_{cm}(t) = v_0 - \frac{f_k}{M} t = v_0 - \mu_k g t \\ \omega(t) = \omega_0 + \alpha t = \frac{5 f_k}{2 M R} t - \frac{5 \mu_k g}{2 R} t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R \omega(t) = v_{cm}(t) - \frac{5 \mu_k g}{2} t \\ v_0 = \frac{5 \mu_k g}{2} t \Rightarrow t^* = \frac{2}{5} \frac{v_0}{\mu_k g} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v^* = v_{cm}(t^*) = \frac{5 \mu_k g}{2} t^* - \frac{5 \mu_k g}{2} t^* = 0$$

Meccanica - Statica

C
O
N
D
I
Z
I
O
N
I

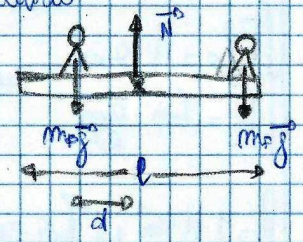
G
E
N
E
R
A
L
I

A
P
P
L
I
C
A
Z
I
O
N
I

Posizione di equilibrio

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{F}_{ext} = 0 \\ \vec{T}_{ext} = 0 \end{cases}$$

Problema con padre e figlio. Distanza d dal centro di massa in cui si deve porre il padre perché il sistema sia all'equilibrio.



$$\begin{cases} N = (M + m_F + m_P)g \\ m_F g \cdot d = m_P g \cdot \frac{l}{2} \end{cases} \Rightarrow d = \frac{m_F}{m_P} \cdot \frac{l}{2}$$

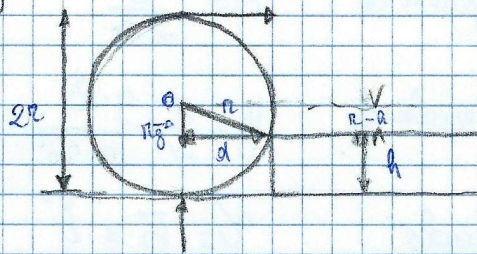
Posizione di equilibrio di una scala appoggiata a una muratura senza attrito e al pavimento con attrito statico di coefficiente μ_s .

$$\begin{cases} N = Mg \\ F = f_s \\ F l \sin \theta - Mg \cdot \frac{l}{2} \cos \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_s = \frac{Mg}{2} \tan \theta \\ f_{s,max} = \mu_s Mg = \frac{Mg}{2} \tan \theta \Rightarrow \mu_s \geq \frac{1}{2} \tan \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \tan \theta \leq 2\mu_s \Rightarrow \theta \geq \arctan \frac{1}{2\mu_s}$$

Forza necessaria perché un carrello superi un gradino di altezza h

2x



$$F(2R-h) - Mg \cdot d + Nd = 0$$

$$\Rightarrow N = \frac{Mg \cdot d - F(2R-h)}{d}$$

Condizione superamento: $N=0$

$$F = \frac{Mg \cdot d}{2R-h} = Mg \frac{\sqrt{(2R-h)h}}{2R-h} = Mg \sqrt{\frac{h}{2R-h}}$$

Elettromagnetismo - Legge di Coulomb e CE.

Legge di Coulomb

$$\vec{F} = K \frac{q_A \cdot q_B}{R^2} \hat{n}$$

Costante di Coulomb

$$K = 8,987 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

Costante dielettrica del vuoto

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Carica unitaria

$$e = 1,60207 \cdot 10^{-19} C$$

Campo elettrico generico

$$\vec{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

Espressioni del CE. generato da:

- carica puntiforme
- insieme di cariche puntiformi
- dipolo elettrico:
 - nel piano equatoriale del dipolo
 - lungo l'asse del dipolo
- sbarrette cariche di lunghezza l sul piano xy e parallele per il suo punto medio.
- anello carico, lungo l'asse di simmetria passante cioè per il suo centro e l al piano yz perpendicolare.
- superficie circolare lungo il suo asse di simmetria
- sfera cavo:
 - all'interno ($a < R$)
 - sulla superficie ($a = R$)
 - all'esterno ($a > R$)
- sfera piena:
 - all'interno ($a < R$)
 - sulla superficie ($a = R$)
 - all'esterno ($a > R$)

$$\vec{E} = K \cdot \frac{Q}{r^2} \hat{n}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \hat{n}_i$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{y^3} \cdot \frac{1}{(1 + \frac{x^2}{y^2})^{3/2}}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \cdot \frac{p}{z^3}$$

$$E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot R^2 \sqrt{y^2 + z^2}}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \hat{z}$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\epsilon_0} \cdot \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/z^2}} \right] \hat{z}$$

$$E = 0$$

$$E = \frac{1}{4\pi R^2} \cdot \frac{Q_{sfera}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi b^2} \cdot \frac{Q_{sfera}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{P \cdot a}{3\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_{sfera}}{R^2}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_{sfera}}{b^2}$$

Momento di dipolo
 $p = 2aq$

- distribuzione di carica lineare di lunghezza indefinita

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

- distribuzione di carica superficiale di spessore indefinito

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Velocità di un punto materiale q in un E uniforme

$$v = \frac{1}{2} \frac{q \cdot E}{m \cdot v_0^2} \cdot r^2$$

Momento torcente in un dipolo

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

Flusso del E

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot \Delta S = E \cdot \Delta S \cdot \cos \theta = E \cdot \Delta S \cdot \cos \theta$$

Radiale

$$\theta = \frac{S}{r^2}$$

Integrale

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{r^2} = \frac{dS_0}{r^2}$$

Teorema di Gauss, il teorema di Gauss si dimostra molte delle volte per il calcolo del E nelle piazze

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum Q_{int}}{\epsilon_0}$$

E in vicinanza di un conduttore

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Electromagnetismo - Potenziale elettrostatico

Lavoro compiuto dalle forze del E per portare una carica puntiforme da a a b

$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Lavoro nel caso di E generato da carica puntiforme

$$L = \frac{q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

Variazione dell'energia potenziale nel E

$$\Delta U_{es} = -L_{es} = -q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Variazione di U nel caso di E generato da carica puntiforme

$$\Delta U_{es} = \frac{q \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right)$$

Energia potenziale in un punto

$$U_p = + \frac{q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r_a} = L_{es}$$

Energia potenziale in un punto di un E generato da carica puntiforme

$$U_p = \frac{q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 \cdot r} = L_{es}$$

Potenziale elettrostatico

$$V = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{U}{q_0}$$

Energia acquisita da un e^- che attraversa il potenziale di 1V

$$1eV = 1 \cdot \frac{1.6 \cdot 10^{-19} C}{1.6 \cdot 10^{-19} C} = 1.6 \cdot 10^{-19} J$$

Potenziale elettrostatico nel caso di E generato da

- carica puntiforme

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}$$

- insieme di cariche puntiformi

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$

anello carico, lungo il suo asse

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

disco, lungo il suo asse

$$V = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R^2 + x^2} - |x|)$$

Energia potenziale di un dipolo in un E uniforme

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Relazione fra campo e potenziale elettrostatici

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} = -\text{grad } V$$

Caratteristica di una superficie equipotenziale

$$V = \text{costante}$$

Elettromagnetismo - Capacità e Condensatori

Capacità di un conduttore isolato

$$C = \frac{Q}{V} \quad \left[\frac{C}{V} \right] = [F]$$

Capacità di un condensatore piano

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma \cdot A}{\frac{\sigma \cdot d}{\epsilon}} = \frac{A}{d} \cdot \epsilon_0$$

Capacità equivalente di un sistema di condensatori collegati in serie

$$V_{\text{TOT}} = V_1 + V_2 \Rightarrow \frac{Q}{C_{\text{eq}}} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} \\ \Rightarrow \frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Capacità equivalente di un sistema di condensatori collegati in parallelo

$$Q_{\text{TOT}} = Q_1 + Q_2 \Rightarrow C_{\text{eq}} V_{\text{TOT}} = C_1 V_1 + C_2 V_2 \\ \Rightarrow C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$$

Energia potenziale di un condensatore

$$U = \int_0^Q V \cdot dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} QV$$

Densità di energia elettrostatica di un E generato da un condensatore.

$$u = \frac{U}{V_E} = \frac{1}{V_E} \cdot \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} \cdot E^2 \cdot d = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \\ = \frac{1}{2} \epsilon_0 E \cdot \frac{Ad}{V_E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Elettromagnetismo - Corrente e Leggi di Ohm

Intensità di corrente

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Relazione fra I e velocità di deriva degli elettroni

$$I = n \cdot A \cdot v_d \cdot |q|$$

Densità di corrente elettrica

$$\vec{j} = \frac{I}{A} = \frac{n A v_d |q|}{A} = n v_d |q| \\ \Rightarrow \vec{j} = n v_d |q|$$

I legge di Ohm

$$R = V/I \quad \left[\frac{V}{A} \right] = [\Omega]$$

II legge di Ohm

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

Resistenza equivalente di un sistema di resistenze in serie

$$V_{tot} = V_1 + V_2 \Rightarrow IR_{eq} = IR_1 + IR_2 \\ \Rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2$$

Resistenza equivalente di un sistema di resistenze in parallelo

$$I_{tot} = I_1 + I_2 \Rightarrow \frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \\ \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Elettromagnetismo - Circuiti in corrente continua e leggi di Kirchhoff

Equazione di una batteria che si scarica

$$V = \mathcal{E} - Ir$$

Equazione di una batteria che si carica

$$V = \mathcal{E} + Ir$$

Potenza dissipata da una resistenza

$$P_R = VI = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

Bilancio energetico per una batteria che si scarica

$$P_R = \mathcal{E}I - I^2 r$$

Bilancio energetico per una batteria che si carica

$$P_C = \mathcal{E}I + I^2 r$$

I legge di Kirchhoff o dei nodi

$$\sum_k I_k = 0$$

II legge di Kirchhoff delle maglie

$$\sum_k V_k = \sum_h \mathcal{E}_h + \sum_j R_j I_j = 0$$

Numero di maglie indipendenti in un circuito

$$n_m = m_n - m_v + 1$$

Carica di un condensatore: quando la carica accumulata

$$q = \mathcal{E}C(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Carica di un condensatore: intensità di corrente

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Scarica di un condensatore: quando la carica

$$q = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Scarica di un condensatore: intensità di corrente

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Elettromagnetismo - CM: forze del CM, legge di Biot-Savart, formula di Ampère

Legge di Coulomb per l'interazione magnetica di due poli

$$F = k_m \frac{q_1^* \cdot q_2^*}{r^2}$$

Forza di Lorentz

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

CM cui è soggetta una particella carica

$$q \times B = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow B = \frac{m v^2}{q r} [T] = \frac{[N]}{[mA]}$$

Particella carica soggetta a CM
e a CF.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Forza agente su un conduttore per
corrente (rettilinea)

$$\vec{F} = I \vec{\ell} \times \vec{B}$$

Momento agente su una spira

$$\vec{\tau} = I \vec{S} \times \vec{B}$$

Momento magnetico di una
spira

$$\vec{m} = I \vec{S}$$

Legge di Biot e Savart (CM nel punto
P)

$$\vec{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{\ell} \times \hat{r}}{r^2}$$

Permeabilità magnetica del vuoto

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{T \cdot m}{A}$$

CM di:

- un lungo filo percorso da corrente
- una spira percorso da corrente,
lungo il suo asse (circolare)
- un solenoide

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$B = \mu_0 n I$$

Teorema di Ampère

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \sum I_{enc}$$

Forza agente tra conduttori per
corrente (filo rettilinei e
paralleli)

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} \cdot l$$

Flusso del CM attraverso una
superficie chiusa

$$\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \cdot dS = 0$$

$[Wb] = [T \cdot m^2]$

Elettromagnetismo - Induzione elettromagnetica, Faraday-Neumann-Lenz, Maxwell

Forza elettromotrice indotta

$$\mathcal{E} = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

Forza el. ind per una bobina con N
spire

$$\mathcal{E}_t = N \mathcal{E} = -N \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$

Forza el. di movimento

$$\mathcal{E} = \left| - \frac{d(B \cdot l \cdot x)}{dt} \right| = \left| -Bl \cdot \frac{dx}{dt} \right| = Blv$$

$$\mathcal{P} = I \cdot \mathcal{E} = I \cdot Blv \Rightarrow \mathcal{E} = Blv$$

Forza el. per spira in rotazione

$$\mathcal{E} = BS \omega \sin(\omega t)$$

Forza el. per N spire in rotazione

$$\mathcal{E} = NBS \omega \sin(\omega t)$$

Campo elettrodinamico indotto
(non conservativo)

$$\mathcal{E} = \oint_{\text{spira}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d\phi(\vec{B})}{dt}$$
$$\Rightarrow \oint_{\text{spira}} \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} \cdot dS}{dt}$$

Induttanza

$$\phi(B) = LI \Rightarrow L = \frac{\phi(B)}{I} \quad [H] = \left[\frac{T \cdot m^2}{A} \right]$$

Forza elettromotrice indotta espressa mediante l'induttanza

$$\mathcal{E}_L = - \frac{d\phi(B)}{dt} = - L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Induttanza per un solenoide con N spire per unità di lunghezza ($N = \frac{n}{l}$)

$$N\phi(B) = LI \text{ e } B = \mu_0 n I \Rightarrow \Rightarrow N\mu_0 n I \cdot S = LI \Rightarrow L = \mu_0 n^2 S l$$

Potenza immagazzinata in un'induttanza

$$P = IV = I L \frac{dI}{dt}$$

Energia potenziale immagazzinata in un'induttanza

$$P = \frac{dW}{dt} = LI \cdot \frac{dI}{dt} \Rightarrow dW = LI dI \Rightarrow W = \int_0^I LI dI = \frac{1}{2} LI^2$$

Energia magnetica e densità di energia magnetica

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 S l I^2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 S l B^2 = \frac{1}{2} \frac{l S}{\mu_0} B^2 \Rightarrow \mu_B = \frac{W}{l S} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$$

Equazione di un circuito LR

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0$$

Intensità di corrente in un circuito LR per carica e scarica

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_L}} \right)$$

Equazione di un circuito LC

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{I}{LC} = 0$$

Intensità di corrente nel circuito LC

$$I(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Voltaggio di C nel circuito LC

$$V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \omega L A \cos(\omega t + \varphi)$$

Pulsazione del circuito LC

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Risultato delle variabili del circuito LC e dei loro valori massimali

$$\begin{cases} I(t) = \frac{V_0}{\omega L} \sin(\omega t) & I_{\max} = I_0 \\ V_C(t) = V_0 \cos(\omega t) & V_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} I_0 = \omega L I_0 = \frac{I_0}{\omega C} \\ q(t) = q_0 \cos(\omega t) & q_0 = C V_0 = \sqrt{LC} \cdot I_0 = \frac{I_0}{\omega} \end{cases}$$

Bilancio energetico del circuito LC (conservativo)

$$V(t) = \frac{1}{2} C V_0^2 = \frac{1}{2} L I_0^2$$

Equazioni di Maxwell:

- 1. Legge di Gauss
- 2. Legge di Gauss per il CM
- 3. Legge di Faraday-Neumann-Lenz
- 4. Legge di Ampère-Maxwell

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \frac{d\phi(B)}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \epsilon_0 \mu_0 \cdot \frac{d\phi(E)}{dt}$$